Exercices de-ci, de-là

Pour chercher et approfondir

Diverses constructions, en classe de seconde, réalisées avec GéoPlan.

Sommaire

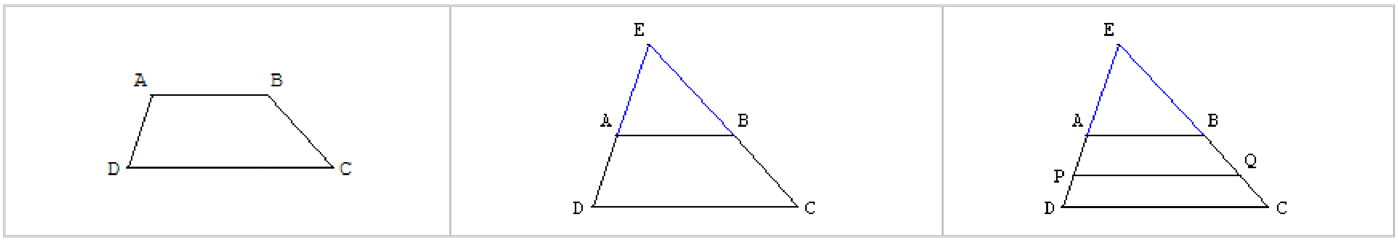
Faire des maths … avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Document Word : http://www.debart.fr/doc/exercices_de_ci_de_la.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/exercices_de_ci_de_la.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/exercices_de_ci_de_la.html

Document n° 78, réalisé le 16/10/2004, mis à jour le 23/1/2008

Rubrique du bulletin de l'APMEP diffusant des exercices proposables à nos élèves, exercices d'origines diverses réunis par Serge Parpay et son équipe de Poitevins "*Le groupe du Clain*" par référence à une publication, appréciée, de l'IREM de Poitiers lors des années 70 (le Clain est la rivière qui passe à Poitiers) et un clin œil, aussi, au grand Félix Klein.

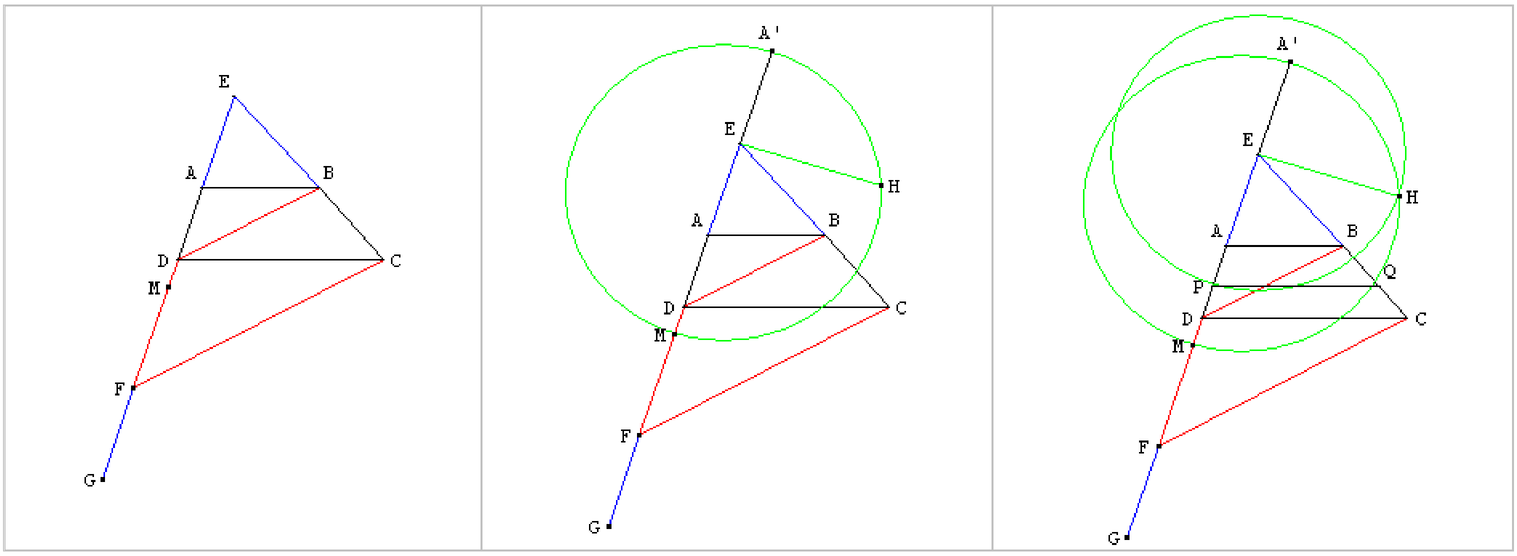
2 - 451. Diviser l'aire d'un trapèze



En posant EA = 1 et ED = $k = \dfrac{DC}{AB}$, pour les aires on a $\mathcal{A}$(EDC) = $k^2\mathcal{A}$(EAB)
donc $\mathcal{A}$(ABCD) = (k^2 - 1) $\mathcal{A}$(EAB).

On obtient de même en posant EP = p, $\mathcal{A}$(ABQP) = (p^2 - 1) $\mathcal{A}$(EAB) et la demande $\mathcal{A}$(ABQP) = $\dfrac{1}{2}$ $\mathcal{A}$(ABCD) équivaut à : $h^2 - 1 = \dfrac{k^2-1}{2}$, soit $h = \sqrt{\dfrac{k^2+1}{2}}$.

Construction à la façon de Descartes

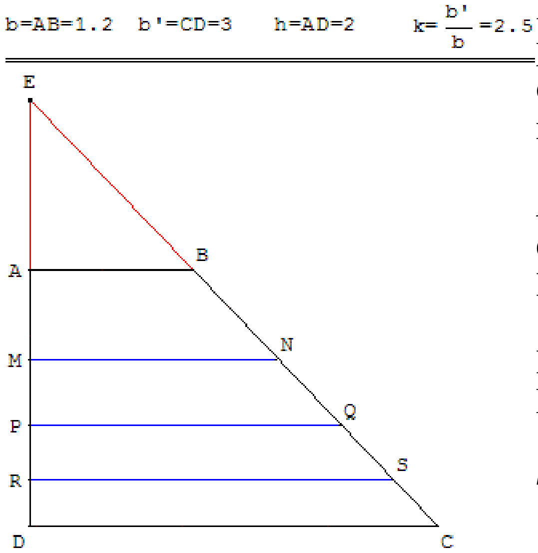


La parallèle à (BD) coupe (ED) en F. Les triangles EDB et EFC sont semblables avec le rapport de similitude k. Comme ED = k, on a EF = k^2.

En reportant l'unité EA en FG, puis en plaçant le milieu M de [EG], on a EM = $\dfrac{k^2+1}{2}$.

On termine alors par la construction classique de la racine carrée d'un nombre :
Reporter l'unité EA en EA' et tracer le cercle de diamètre [MA']. La perpendiculaire à (MA') en E coupe le cercle en H. EH est la moyenne géométrique de EA' et EM.
Il suffit de rabattre H en P sur [ED] et de terminer (PQ) parallèle aux bases du trapèze.

Diviser un trapèze en quatre parties égales



Diviser en 4 parts égales l'aire d'un trapèze rectangle. Ces 4 parts ont leurs bases parallèles à la base du grand trapèze, cela revient à diviser ce grand trapèze en 4 petits trapèzes de même aire...

ABCD est un trapèze rectangle en D, de petite base b = AB, de grande base b' = CD et de hauteur h = AD.
Les côtés non parallèles du trapèze se rencontrent en E.

La propriété de Thalès dans le triangle ECD permet d'écrire les rapports :

$k = \frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} = \frac{b'}{b}$, or $\frac{ED}{EA} = \frac{EA + AD}{EA} = 1 + \frac{AD}{EA}$,

soit $\frac{AD}{EA} = k - 1$ et EA = $\frac{AD}{k-1} = \frac{h}{k-1}$.

Le partage en quatre se fait par les segments [MN], [PQ] et [RS] parallèles aux bases.

[PQ] correspond au partage en deux, traité ci-dessus : avec EP = p EA, A(ABQP) = (p^2 - 1) A(EAB)

et la demande A(ABQP) = $\frac{1}{2}$$A$(ABCD) équivaut à :

$p^2 - 1 = \frac{1}{2}(k^2 - 1)$, soit $p = \sqrt{\frac{k^2+1}{2}}$.

[MN] correspond au quart de l'aire trapèze:

avec EM = m EA, A(ABNM) = (m^2 - 1) A(EAB) et la demande A(ABNM) = $\frac{1}{4}$$A$(ABCD) équivaut

à : $m^2 - 1 = \frac{1}{4}(k^2 - 1)$, soit $m = \frac{\sqrt{k^2+3}}{2}$.

[RS] correspond au partage en deux traité ci-dessus : avec ER = r EA, A(ABSR) = (r^2 - 1) A(EAB)

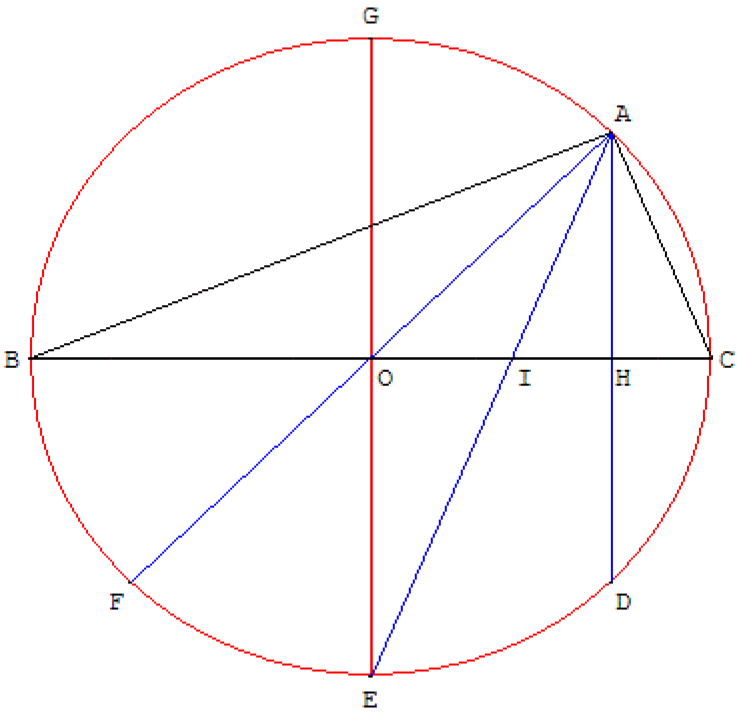
et la demande A(ABSR) = $\frac{3}{4}$$A$(ABCD) équivaut à : $r^2 - 1 = \frac{3}{4}(k^2 - 1)$, soit $r = \frac{\sqrt{3k^2+1}}{2}$.

4 - 452. Construction de-ci, de-là

Existe-t-il un triangle ABC tel que la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle BÂC et la médiane relative au côté [BC] partagent l'angle BÂC en quatre angles de même mesure ?

Avec un énoncé un peu modifié qui le rendait un peu captif de la loi des sinus $\frac{a}{\sin A} = \ldots$,
énoncée en préambule

Solution



ABC est un triangle rectangle en A, l'angle droit est partagé en quatre angles de 22,5°. Un angle aigu du triangle mesure 22,5° et si O est le milieu de [BC], la médiane (AO) fait un angle de 45° avec l'hypoténuse.

Indications (Colette Grippon - 86 Buxerolles)

Une solution de ce problème repose sur l'idée que les quatre angles égaux interceptent quatre arcs de même mesure sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit un triangle ABC et (*c*) son cercle circonscrit de centre O.
La bissectrice (AI) de l'angle BÂC recoupe le cercle circonscrit (*c*) en E. Le point E, milieu de l'arc BC, est situé sur la médiatrice de [BC], la droite (OE). La médiatrice (OE) et la hauteur (AH), perpendiculaires à (BC), sont parallèles ; elles forment avec la droite (AE) des angles alternes-internes HÂE et AÊO égaux. Le triangle OAE est isocèle, les angles à la base AÊO et OÂE sont égaux. Par transitivité HÂE = OÂE. (AE) est la bissectrice de HÂO.
Pour répondre au problème posé, il faut donc que (AO) soit la médiane relative au côté [BC]. Le point O, centre du cercle circonscrit, est le milieu de [BC]. Le triangle ABC est rectangle en A. C'est une condition nécessaire, mais pas suffisante.
La hauteur (AH) recoupe le cercle circonscrit (*c*) en D et la médiane (AO) en F. Les points D, E et F partagent le demi-cercle en quatre arcs égaux. Les points A et D sont symétriques par rapport à la droite (BC). A est le milieu de l'arc CG.

Programme de construction

Tracer un cercle (*c*) et deux diamètres [BC] et [EG] perpendiculaires. Tracer les deux bissectrices de ces diamètres qui coupent le cercle en A et F pour l'une, et en D pour l'autre ; les points A et D étant d'un même côté de la droite (EG). Le triangle rectangle ABC est une solution du problème et les trois droites remarquables (AD), (AE) et (AF) partagent l'angle BÂC en quatre angles de 22,5°.

Relations métriques

Soit r le rayon du cercle circonscrit. Dans le triangle rectangle isocèle AHB on a OH = AH = $r\frac{\sqrt{2}}{2}$.

BH = BO + OH = $r + r\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})$ et HC = OC - OH = $r - r\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$.

Dans le triangle rectangle ABH la propriété de Pythagore permet d'écrire :

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}(2+\sqrt{2})^2 = \frac{r^2}{4}[2+(2+\sqrt{2})^2] = \frac{r^2}{4}[8+4\sqrt{2}] = r^2(2+\sqrt{2})$,

$AB = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Un calcul analogue dans le triangle rectangle AHC donne

$AC^2 = r^2(2-\sqrt{2})$ et $AC = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

On trouve les lignes trigonométriques $\cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

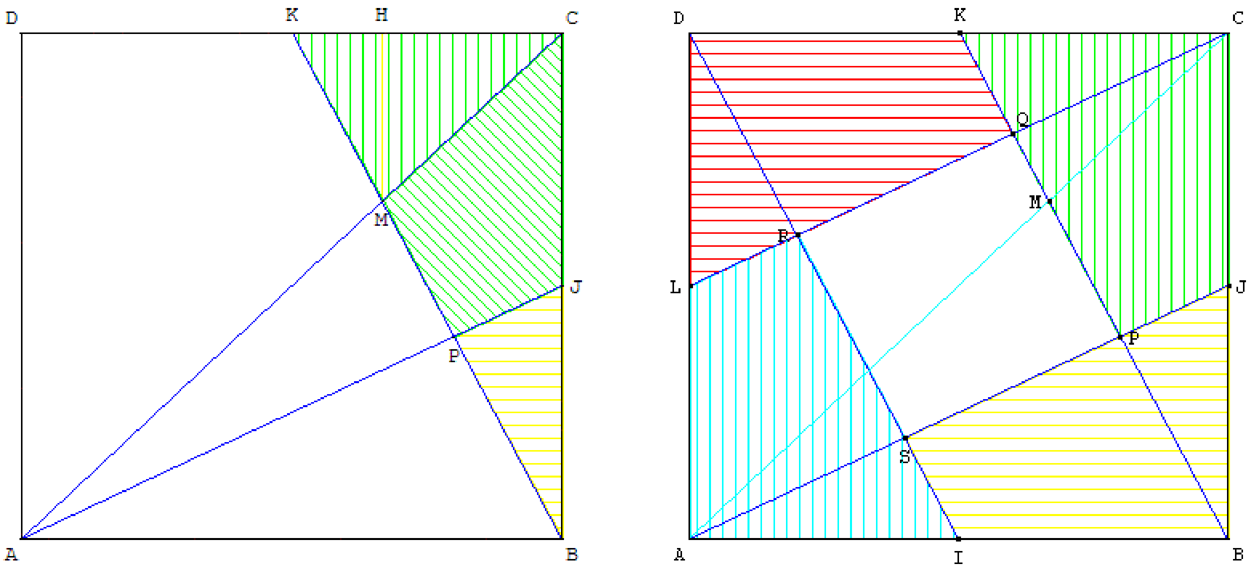
Généralisation : calcul des valeurs trigonométriques de l'angle moitié :

Soit OAH un triangle rectangle en H, d'hypoténuse [OA] de longueur 1, dont on connaît *cos* Ô ou *sin* Ô.

En plaçant sur la droite (OA) les deux points B et C à une distance 1 de O, le point C sur la demi-droite [OH], on obtient un triangle ABC d'angle ABC = $\frac{A\hat{O}C}{2}$.

Dans les triangles rectangles AHB et AHC, le calcul de AB et AC en fonction de OH = *cos* Ô et de AH = *sin* Ô, permet d'en déduire $\cos(\frac{\hat{O}}{2}) = \frac{AB}{2}$ et $\sin(\frac{\hat{O}}{2}) = \frac{AC}{2}$.

4 - 453. Découpage d'aires dans un carré



Soit ABCD est un carré de côté a, J et K les milieux de [BC] et [CD].
Quelle est l'aire du quadrilatère PJCK ?
Si M est le point d'intersection de (BK) et (AC), quelle est l'aire du quadrilatère PJCM ?

Quadrilatère PJCK

Calcul d'aire de triangles

D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABJ, rectangle en B, $AJ^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$, d'où l'hypoténuse $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Montrer que (AJ) est perpendiculaire à (BK) : *voir* droites orthogonales dans un carré : angles - rotations.

Le triangle BPJ, rectangle en P, d'hypoténuse $\frac{1}{2}a$, est semblable au triangle ABJ dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\mathcal{A}(ABJ) = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$, $\mathcal{A}(BPJ) = \frac{1}{5} \times \mathcal{A}(ABJ) = \frac{1}{20}a^2$.

Par différence $\mathcal{A}(PJCK) = \mathcal{A}(BCK) - \mathcal{A}(BPJ) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{20}a^2 = \frac{1}{5}a^2$.

Carré d'aire cinq fois plus petite (figure de droite)

Montrer que (AJ) est perpendiculaire à (BK), calculer PQ en fonction de a, justifier que PQRS est un carré,

montrer que son aire est égale à $\frac{1}{5}$ de l'aire de ABCD.

Un découpage de ABCD permet de reconstituer 5 petits carrés en collant aux 4 trapèzes adjacents au carré central PQRS, 4 triangles rectangles : faire pivoter ces triangles par des rotations de 180° autour des milieux des côtés du grand carré.

Chacun des quadrilatères PJCK, QKCL, ... a donc une aire de $\frac{1}{5}a^2$.

Quadrilatère PJCM

Étude du triangle KCM :

Dans le carré ABCD, les droites (ID) et (BK), joignant deux sommets opposés aux milieux des côtés opposés, sont parallèles et partagent la diagonale [AC] joignant les deux autres sommets en trois parties égales : *voir* parallélogramme et milieux.

Si H est la projection de M sur (CD), MH = $\frac{1}{3}a$

et $\mathcal{A}$(KCM) = $\frac{1}{2} \times \text{KC} \times \text{MH} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{3}a = \frac{1}{12}a^2$.

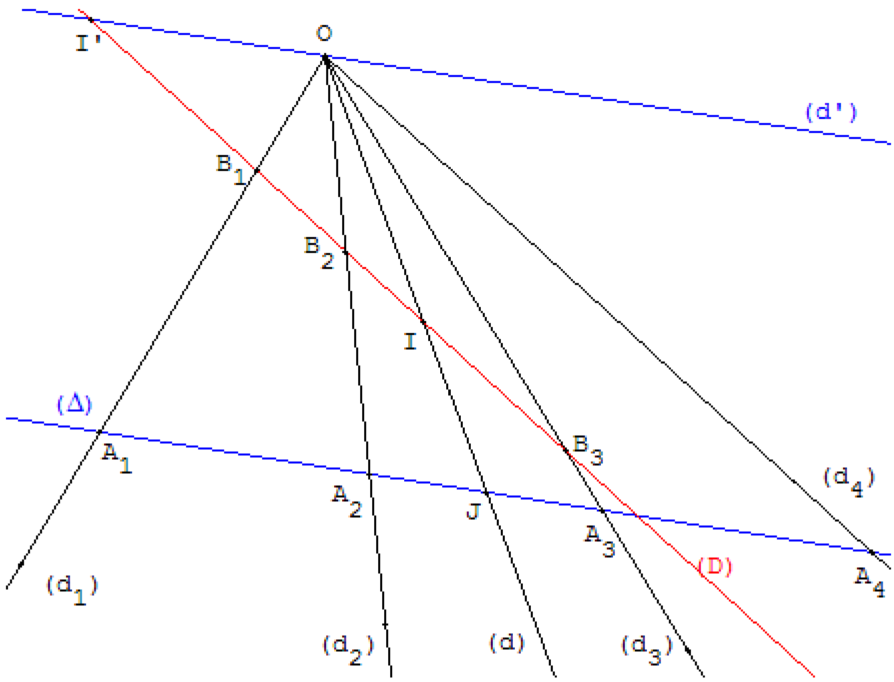
Par différence $\mathcal{A}$(PJCM) = $\mathcal{A}$(PJCK) - $\mathcal{A}$(KCM) = $\frac{1}{5}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{7}{60}a^2$.

5. Découper deux segments égaux

Un problème original de Serge Parpay créé pour le rallye Mathématique Poitou-Charentes - Corol'aire n° 69 - Juin 2007

Quatre droites (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) sont concourantes en un point O.
Construire une droite (Δ) qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3, A_4 de telle sorte que $A_1A_2 = A_3A_4$.

Analyse



Soit (Δ) une droite répondant à la question (remarquons que toute parallèle à (Δ), ne passant par O, conviendrait également).
$A_1A_2 = A_3A_4$, les segments [A_1A_4] et [A_2A_3] ont même milieu J. Soit (*d*) la droite passant par O et J et (*d'*) la parallèle à (Δ) passant par O.

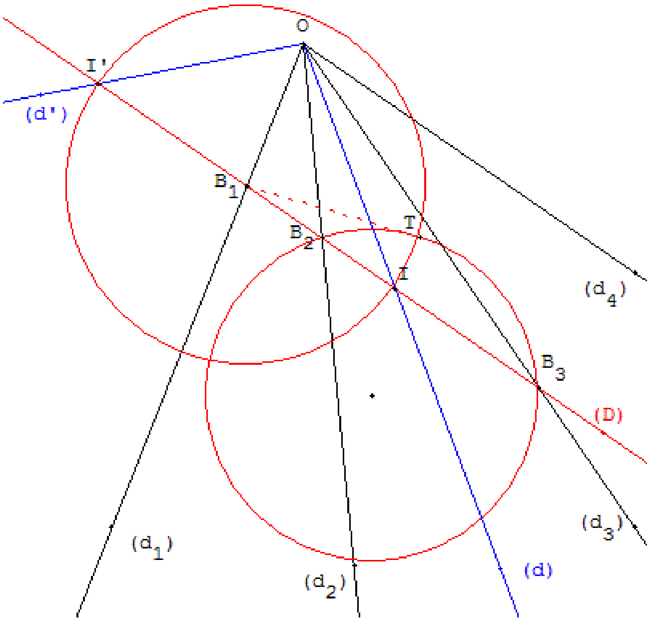
J étant le milieu de [A_1A_4] les droites (d_1, d_4, d, d') forment un faisceau harmonique.

Réciproquement soit (D) une droite parallèle à (d_4) coupant les trois autres rayons du faisceau en B_1, I et I'. Le point B_1 est le milieu de [II'].

Par ailleurs comme J est aussi le milieu de [A_2A_3] les droites (d_2, d_3, d, d') forment un autre faisceau harmonique. (B_2, B_3, I, I') forment une division harmonique.
Avec le milieu B_1 de [II'] la relation de Newton permet d'écrire : $B_1I^2 = B_1I'^2 = B_1B_2 \times B_1B_3$.

Cette relation va permettre la construction de I et I' et par suite des droites (*d*) et (*d'*).

Construction des points I et I'



Une droite (D) parallèle à (d_4) donne les points B_1, B_2, B_3.

Le produit $B_1B_2 \times B_1B_3$ est la puissance du point B_1 par rapport à un cercle passant par B_2 et B_3.
On trace alors un tel cercle et une tangente (B_1T)) à ce cercle.

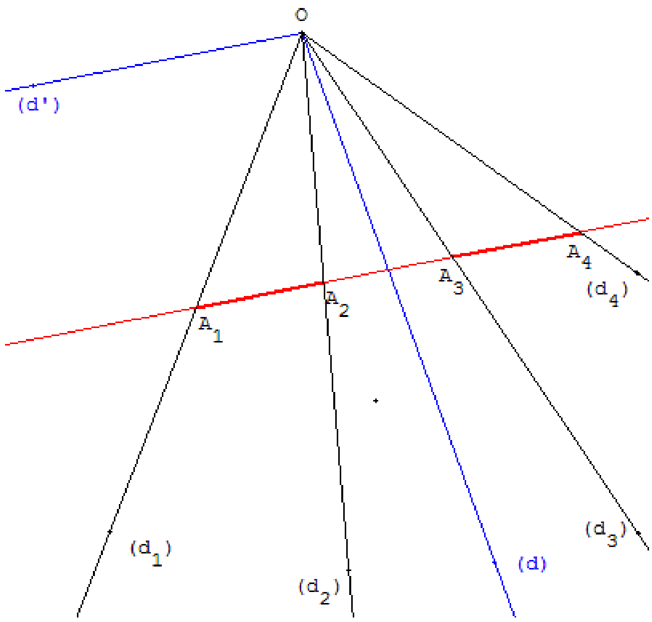
Le cercle de centre B_1 passant par T coupe la droite (D) en I et I'.
On a bien $B_1T^2 = B_1B_2 \times B_1B_3 = B_1I^2 = B_1I'^2$.

En joignant O à I et I', on construit les droites (d) et (d') cherchées.

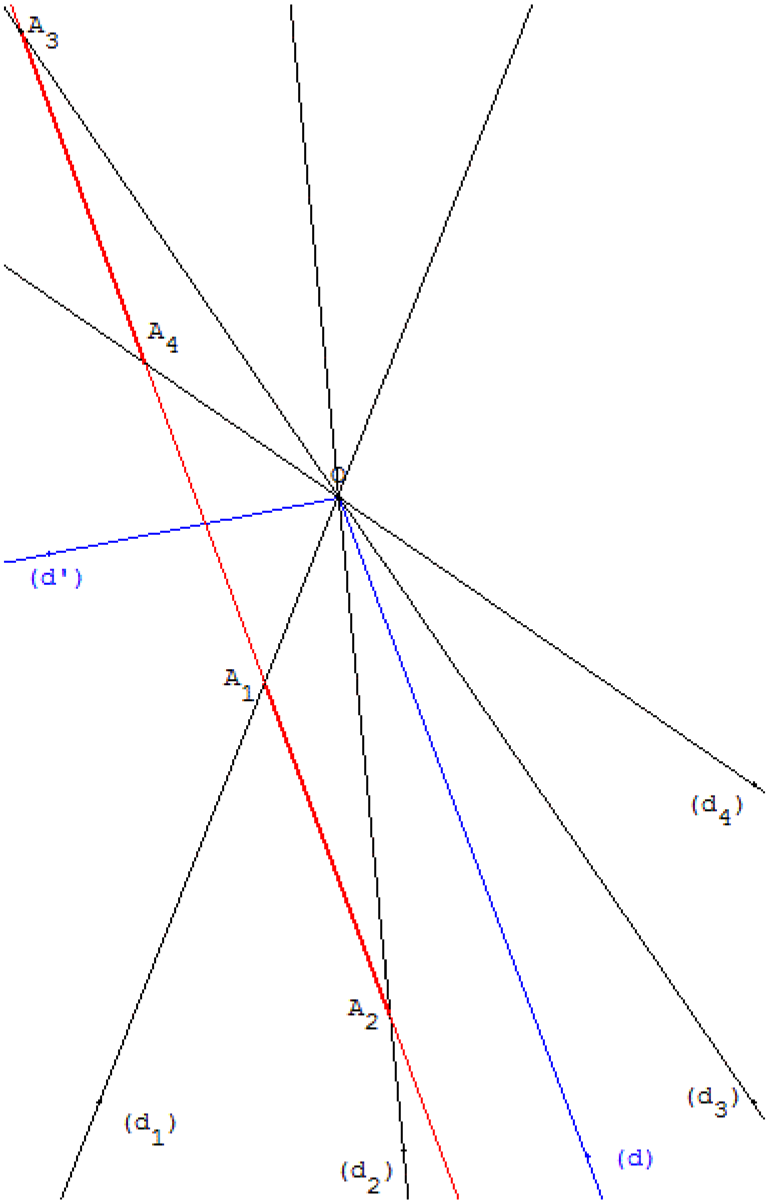
Une solution

En menant, à partir d'un point A_1 situé sur (d_1), une droite (Δ) parallèle à (d'), on trouve une solution au problème.

De même ci-contre une parallèle (Δ) à (d) donne une autre solution du problème.



Une autre solution

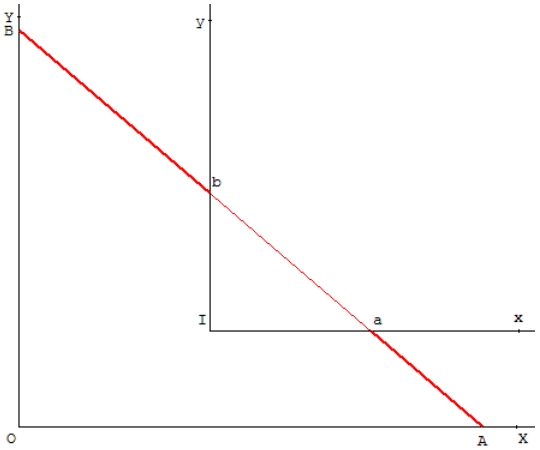


Défi collège

Défi proposé par Serge Parpay

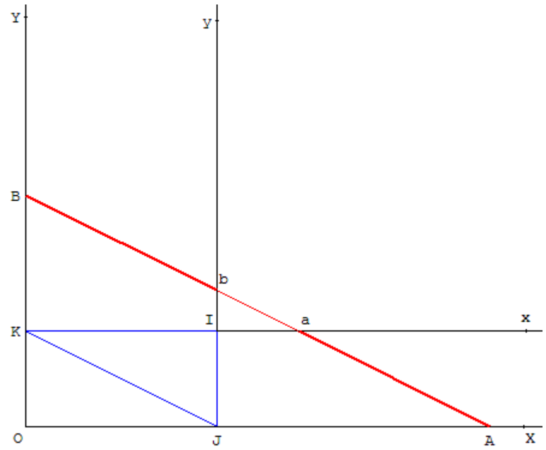
Soit les deux angles XÔY et *x*Î*y*, aux côtés respectivement parallèles.
Construire une droite (D) coupant [OX) en A, [OY) en B, [I*x*) en a et [I*y*) en b telle que Aa = Bb.

Angles droits



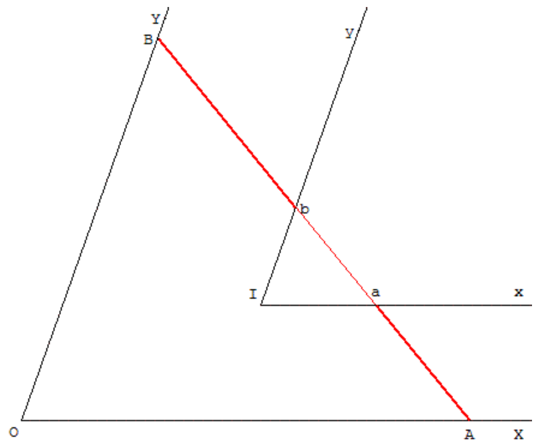
Avec GéoPlan, déplacer les points A ou a pour trouver la solution

Solution

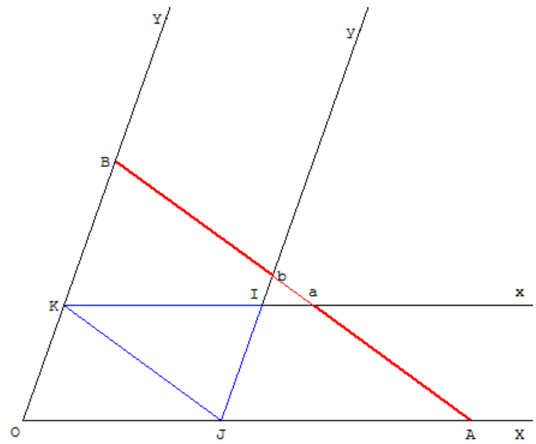


Avec GéoPlan, taper S pour la solution.

Angles aigus



Solution



6. Tourniquette sur un polygone

Figures de Thompsen

Tourniquette : ligne brisée formée par une suite de segments deux à deux parallèles tracés sur une figure comme un polygone ou une conique. Ces figures de Thompsen sont des problèmes intéressants de clôture : le tourniquet peut-il être infini ou se ferme-t'il ? Si oui, au bout de combien de tours ?

Tourniquette sur un triangle

Soit ABC un triangle et M_1 un point de [AB].
On effectue la construction suivante :
M_2 point de [AC] tel que (M_1M_2) // (BC),
M_3 point de [BC] tel que (M_2M_3) // (AB),
M_4 point de [AB] tel que (M_3M_4) // (AC),
M_5 sur [AC] ...
M_6 sur [BC] ...
La tourniquette se referme en deux tours et $M_7 = M_1$.

Tourniquette sur un quadrilatère

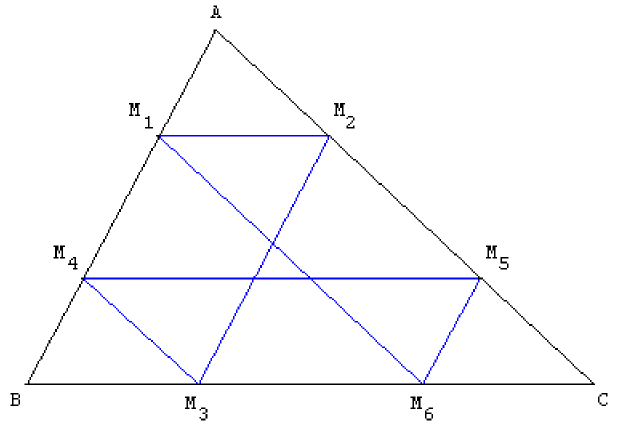
La tourniquette se referme en un tour et $M_5 = M_1$;
la figure $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

Tourniquette sur un pentagone

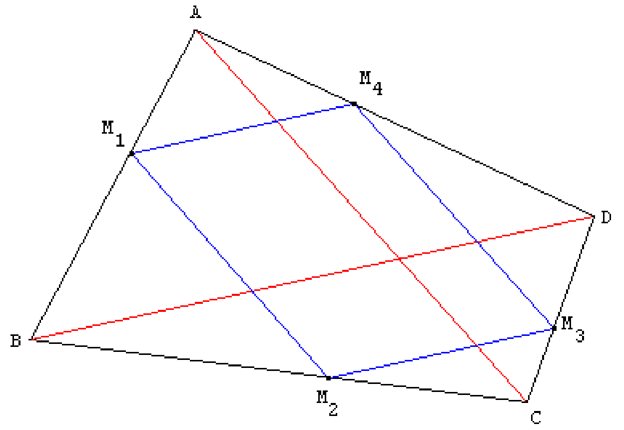
(M_1M_2) // (AC), (M_2M_3) // (BD), (M_3M_4) // (CE) ...
La tourniquette se referme en deux tours : $M_{11} = M_1$.
Pour d'autres polygones, en déduire une conjecture suivant la parité du nombre de côtés.
Tourniquette sur un cercle
On choisit sur un cercle quatre points distincts M_1, M_2, M_3 et M_4.
On construit les deux points M_5 et M_6 tels que :
M_5 point du cercle tel que (M_4M_5) // (M_1M_2),
M_6 point du cercle tel que (M_5M_6) // (M_2M_3).
(M_6M_1) // (M_3M_4) : la tourniquette se referme et $M_7 = M_1$.
La figure $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ est un hexagone aux côtés deux à deux parallèles.

Technique GéoPlan
Pour les polygones les figures utilisent le prototype :
M2 point parallèle M1, A, C, B
qui permet de calculer le point M_2 intersection de la parallèle à (AC) passant par M_1 et de la droite (CB).

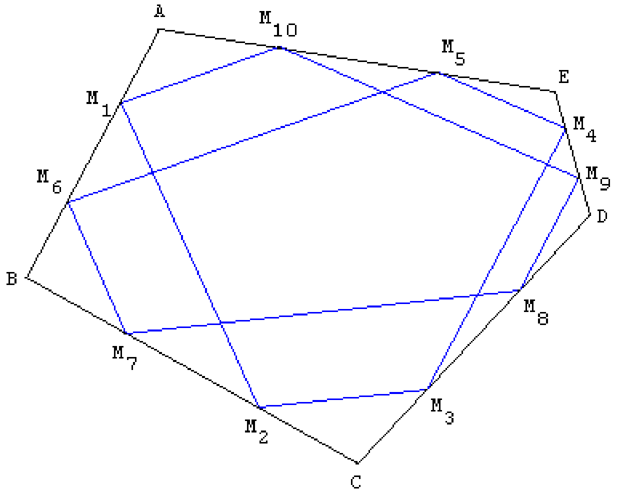
1. Triangle



2. Quadrilatère



3. Pentagone



4. Cercle